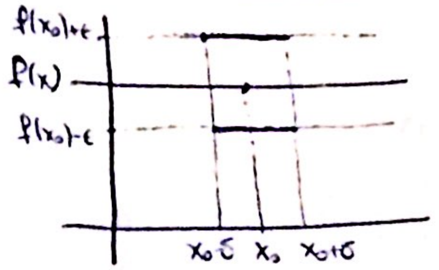
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ - ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Έστω επίσης $x_0 \in A$. Η f συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.



$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$$

Παραδείγματα:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon > 0$.
Εμείς πρέπει να βρούμε κάποιο $\delta > 0$ ώστε $\forall x$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει
$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow |c - c| < \epsilon$
Μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε $\delta > 0$ (π.χ. $\delta = 10^6$)
Έτσι, f συνεχής στο x_0.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon > 0$.
Θέτοντας $\delta = \epsilon$ έχουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0. Αφού η f συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής.

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 5x + 4$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon > 0$.
Θέτουμε $\delta = \epsilon/5$ και έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει:
$|f(x) - f(x_0)| = |(5x + 4) - (5x_0 + 4)| = |5x - 5x_0| = 5|x - x_0| < 5\delta = \epsilon$.
Άρα, η f συνεχής στο x_0.

Scanned by CamScanner

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon>0$.

$|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0^2|=|x-x_0||x+x_0|$

Αφού το δ το επιλέγουμε εμείς, μπορούμε να το επιλέξουμε $\delta\leq 1$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta\leq 1$

$|x+x_0|=|x-x_0+2x_0|\leq|x-x_0|+2|x_0|<1+2|x_0|$

Έτσι, $|f(x)-f(x_0)|=|x+x_0||x-x_0|<(1+2|x_0|)\delta$

Επειδή θέλουμε αυτό να βγει μικρότερο από το ε θέλουμε $\delta\leq\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$

Θέτουμε $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}>0$

$\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$

$|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0^2|=|x+x_0||x-x_0|\leq(|x-x_0|+2|x_0|)|x-x_0|\leq(1+2|x_0|)\delta\leq\varepsilon$.

Άρα, η f είναι συνεχής στο σημείο x_0.

Η άρνηση του ορισμού

$f:A\to\mathbb{R}$ $x_0\in A$.

Η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αν υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχει $x\in A$ ώστε $|x-x_0|<\delta$ και $|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$.

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ (συνάρτηση Dirichlet)

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής, σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε $x_0\in\mathbb{R}$.

1η περίπτωση: $x_0\in\mathbb{Q}$ ώστε $f(x_0)=1$.

Θέτουμε $\varepsilon=1/2$

Για τυχόν $\delta>0$ με την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ ισχύει x άρρητος με $x_0-\delta<x<x_0+\delta$. Έτσι $|x-x_0|<\delta$ και $|f(x)-f(x_0)|=|0-1|=1>1/2=\varepsilon$.

2η περίπτωση: $x_0\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ οπότε $f(x_0)=0$.

Θέτουμε $\varepsilon=1/2$.

Για τυχόν $\delta>0$ επιλέγουμε $x\in\mathbb{Q}$ με $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

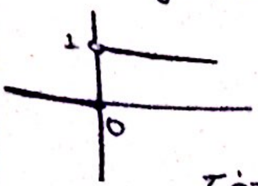
($\exists$ τέτοιο x λόγω της πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$)

Έτσι, $|x-x_0|<\delta$ και $|f(x)-f(x_0)|=|1-0|=1>1/2=\varepsilon$.

Scanned by CamScanner

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0.



Θέτουμε $\varepsilon = 1$.

$\forall \delta > 0$ επιλέγουμε x με $0 < x < \delta$

Τότε $|x - 0| < \delta$ και $|f(x) - f(0)| = |1 - 0| = 1$

Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Θεώρημα: [χαρακτηρισμός της συνέχειας στο x_0 μέσω ακολουθιών]

(Αρχή της Μεταφοράς)

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(1) Η f είναι συνεχής στο x_0.

(2) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A και $x_n \to x_0$ τότε $f(x_n) \to f(x_0)$.

Απόδειξη:

(1) $\Rightarrow$ (2) Υποθέτουμε ότι f συνεχής στο x_0.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο A με $x_n \to x_0$ θα αποδείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Από τη συνέχεια της f στο x_0 υπάρχει κάποιο $\delta > 0$

για κάθε $x \in A$ ώστε $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (*)

Εφόσον $x_n \to x_0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $|x_n - x_0| < \delta$

Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ από την (*) έχουμε

$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Επομένως, $f(x_n) \to f(x_0)$.

(2) $\to$ (1) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $\forall \delta > 0$ $\exists x \in A$ ώστε $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ (**)

Εφαρμόζοντας την (**) για $\delta = 1/n$ $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n \in A$ ώστε $|x_n - x_0| < 1/n$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Έτσι, ορίσαμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A και εφόσον $|x_n - x_0| < 1/n$ προκύπτει $x_n \to x_0$. Από την υπόθεση προκύπτει $f(x_n) \to f(x_0)$. Επομένως, η f συνεχής στο x_0.

Παρατήρηση: 1) Το παραπάνω θεώρημα (αρχή μεταφοράς) χρησιμοποιείται με 2 τρόπους. α) Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

Δείχνουμε ότι $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

β) Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

Αρκεί να βρούμε μια ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Scanned by CamScanner

2) Αν $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και θα βρούμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ και $f(x_n) \to \ell_1$, $f(y_n) \to \ell_2$ με $\ell_1 \neq \ell_2$

Τότε, η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

Παράδειγμα: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και θα δείξουμε ότι η f ασυνεχής στο x_0.

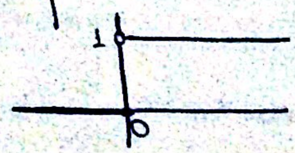
Επιλέγουμε (x_n) ακολουθία ρητών με $x_n \to x_0$

(y_n) ακολουθία ρητών με $y_n \to x_0$

Τότε $f(x_n) = 1 \to 1$

$f(y_n) = 0 \to 0$

Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο x_0.



Scanned by CamScanner